Soit (A_i, B_i) un couple d'évènements indépendants car les tirages sont effectués avec remise.

~~Soit $A_i(\Omega) = \{0;1;2\}$ car il y a uniquement des jetons numérotés de 0 à 2.~~

~~Soit $B_i(\Omega) = \{0;1;2\}$ car il y a uniquement des jetons numérotés de 0 à 2.~~

Soit X la somme des deux numéros obtenus.
Comme A_i et B_i sont indépendants, alors on a :

$X(\Omega) = [\![0;4]\!]$

De plus, on a $P(X=0) = P(A_0 \cap B_0)$ comme les évènements sont indépendants $P(A_0 \cap B_0) = P(A_0) \times P(B_0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$P(X=1) = P(A_1 \cap B_0) \cup P(A_0 \cap B_1) = P(A_1) \times P(B_0) + P(A_0) \times P(B_1)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2) = P(A_1 \cap B_1) \cup P(A_2 \cap B_0) \cup P(A_0 \cap B_2)$$
$$= P(A_1) \times P(B_1) + P(A_2) \times P(B_0) + P(A_0) \times P(B_2)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$
$$= \frac{4+3+3}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

2) Calcul d'espérance

On a ici un cas où la variable aléatoire est finie. Ainsi, son espérance existe toujours car la série est une somme finie de réels. Or, d'après le cours, une somme finie de réels converge. Dès lors, l'espérance existe et on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} k$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{n \times (n+1)}{2}$$

$$= \boxed{\frac{n}{2}}$$

On a donc $\boxed{E(X) = \frac{n}{2}}$

3) <u>Variance</u>

On s'intéresse à la convergence du moment d'ordre 2 de X ($E(X^2)$)

Soit $E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \, P(X = k)$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n \times (2n+1)}{6}$$

Comme n est un nombre fini, alors $E(X^2)$ converge

et existe et $E(X^2) = \frac{n \times (2n+1)}{6}$

D'après la formule de Köning-huygens,

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= \frac{n \times (2n+1)}{6} - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n \times (2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4}$$

$$= \frac{2n^2+2n}{6} - \frac{n^2}{4}$$

$$= \frac{4n^2+4n-3n^2}{12}$$

$$V(X) = \frac{n^2+4n}{12} = \boxed{\frac{n^2}{12} + \frac{n}{3}}$$

4. Loi usuelle :

1) Soit X la variable comptant le nombre de

Faces avant le 1^{er} pile.

La variable $X+1$ nous donne donc le rang du premier pile.

Comme $Y = X+1$ et que les évènements sont 2 à 2 indépendants, alors, Y suit une loi géométrique de probabilité de succès $p \in]0,1[$

On a alors $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

2) On a $X+1 = Y$
$\Leftrightarrow X = Y-1$

Or, comme Y suit une loi géométrique, d'après le cours, $E(Y) = \frac{1}{p}$

On a également $E(Y-1) = E(Y) - 1$ (par linéarité de l'espérance)

Or, $E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$

Comme $X = Y-1$ et que Y admet une espérance, alors, on a $E(X) = E(Y-1)$
$\Leftrightarrow E(X) = E(Y) - 1$
$\Leftrightarrow E(X) = \frac{1-p}{p}$

De même : $X + 1 = Y$

$\Leftrightarrow X = Y - 1$

Or, comme Y suit une loi géométrique, alors, d'après le cours,

$$V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Comme Y admet une variance, alors :

$$V(X) = V(Y-1)$$

Or, $V(Y-1) = V(Y)$ (par linéarité de la variance)

Donc $V(X) = V(Y) = \dfrac{q}{p^2}$

5) Soit $(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un SCE

On note B l'évènement "obtenir une boule rouge"

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(B \cap X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P_{(X=k)}(B)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \times \frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{(k+1)!}$$

Calculons en passant par les sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{j=2}^{n+1} \frac{j-1}{j!} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!}$$

$$= \sum_{j=2}^{n+1} \frac{j}{j!} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!}$$

$$= \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{(j-1)!} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - 2 \times \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!}$$

On reconnaît 2 séries exponentielles absolument convergentes

avec :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = e - 2$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 2 \times \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e - 1 - 2 \times (e - 2)$

$= e - 1 - 2e + 4$

$= \boxed{-e + 3}$